

27.11.

Obecné schéma řešení

optimalizační úlohy:

Je zadána $f = \text{spojitá fce}$
a $M = \text{kompaktní množina}$,
hledáme extrém (globální)
fce f na M .

(A) Najdeme kandidáty na
extrém vnitřní množ. M° (M°)

= jeho stacionární body
 f ležící v M°

(B) Najdeme kandidáty
na extrém na okraji $M(\partial M)$

(C) Porovnáme hodnoty ve
všech kandidátech, určíme
max a min.

Kandidáty na okraj se hledají
jako tzv. vázané extrémy;
násta = rovnice zadávající okraj
(nebo jeho část). Dle typu
okraje volíme různé metody.

[1] Dosazovací metoda pro fce
dvou proměnných.

Tzn. máme $f = f(x,y)$, $M \subset \mathbb{R}^2$

Nejjednodušší případ:

$M = \text{mnohoúhelník}$, tj. úhelník

s rovnými stranami, tj. strana
lze vyjádřit jako část přímk,

tj. máme lineární rovnice

$$y = ax + b \text{ nebo } x = c.$$



(α) kandidáty na stanice M
přímou úroveň najdeme takto:
lineární rovnici doplníme
do fce f, dostaneme tak fci
jedné proměnné, označme
ji $h(x)$ resp. $h(y)$, a její
stacion. body jsou hledané
kandidáty. Tj. řešíme rovnici

$h' = 0$ a ověříme, zda
výsledek náleží do M.

(β) úroveň množiny M jsou
automaticky kandidáty
na extrém.

Př: Najděte extrém fce

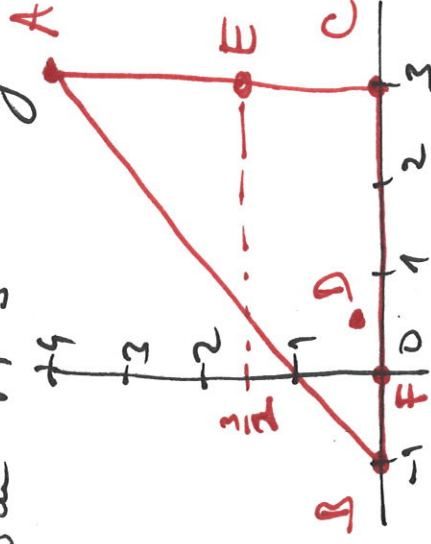
$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$$

na trojúhelníku M s vrcholy

$$A = [3, 4]$$

$$B = [-1, 0]$$

$$C = [3, 0]$$



(A) Kandidát v $M^\circ = \text{stac. body fce f}$

$$\partial_x f = 3x^2 - 3y = 0 \quad (1) \quad +2$$

$$\partial_y f = -3x + 6y = 0$$

$$\frac{6x^2 - 3x}{6x^2 - 3x} = 0$$

$$3x(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Řešení } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad 6y = 3x \Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ má 2 stac. body

$[0,0] \notin H^0 \dots$ není kandidát (zajímá)

$D = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}] \in H^0 \dots$ je kandidát

B Kandidati me DH:

Δ má 3 strany, problém je postupně:

- strana AC je dána rovnicí $x=3$

(to je vidět!) a omezením

$y \in (0,4)$; vzhled $x=3$

dodáme do fce $f(x,y)$:

$$h(y) = f(3,y) = 27 - 9y + 3y^2$$

$$h'(y) = -9 + 6y = 0$$

$$6y = 9 \quad / :6$$

$$y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \in (0,4) \checkmark$$

$\Rightarrow$ kandidát $E = [3, \frac{3}{2}]$

- strana BC ... rovnice $y=0$
 $x \in (-1,3)$

vzhled $y=0$ dodáme do f:

$$h(x) = f(x,0) = x^3$$

$$h'(x) = 3x^2 = 0$$

$$x=0 \in (-1,3) \checkmark$$

$\Rightarrow$ kandidát $F = [0,0]$

- strana AB ... rovnice = ?

vypočítáme ji z bodů A, B:

do rovnice $y = ax + b$ dodáme

$$A = [3,4]: 4 = a \cdot 3 + b \quad \text{dodáme}$$

$$B = [-1,0]: 0 = a \cdot (-1) + b$$

$$\frac{4 = 4 \cdot a}{a = 1}$$

dopčteme $\underline{\underline{b=1}} \Rightarrow \boxed{y = x+1}$

maime kdy vzeln $y = x + 1$
a omezen $x \in (-1, 3)$

doadime vzeln do f :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, x+1) = \\ &= x^3 - 3 \cdot x \cdot (x+1) + 3 \cdot (x+1)^2 = \\ &= x^3 - \cancel{3x^2} - 3x + \cancel{3x^2} + 6x + 3 = \\ &= x^3 + 3x + 3 \\ h'(x) &= 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) \stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Nikdy $\Rightarrow$ na shaně AB
penni eddy kandidat

Dale ∇ nchoz Δ jsm
kandidati na extrém.

C ∇ kandidaty doadime
do f , porovname hodnoty:

$$\begin{aligned} A: f(3, 4) &= 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 = \\ &= 27 - 36 + 48 = \textcircled{-39} \text{ MAX} \end{aligned}$$

$$B: f(-1, 0) = (-1)^3 = \textcircled{-1} \text{ MIN}$$

$$C: f(3, 0) = 3^3 = 27$$

$$D: f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} E: f\left(3, \frac{3}{2}\right) &= 27 - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4} \\ &= 20,25 \end{aligned}$$

$$F: f(90) = 0$$

Speciální případ:

$f =$ lineární fce dvou prom.

$$\text{tzn. } f(x,y) = ax + by + c,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, předp. že

aspoň 1 z čísel a, b je nenulové ($\Rightarrow f$ neliniovost.)

Stacion. body lineární fce = ?

$$\left. \begin{aligned} \partial_x f &= a \stackrel{?}{=} 0 \\ \partial_y f &= b \stackrel{?}{=} 0 \end{aligned} \right\} \text{ Nikdy.}$$

Proto lineární fce nemas

žádné stac. body. Tedy
nemá žádné kandidáty v M^0 .

~~Pro~~ Dále, dosazením lin. vztahů
do lin. fce dostáváme $\rightarrow$

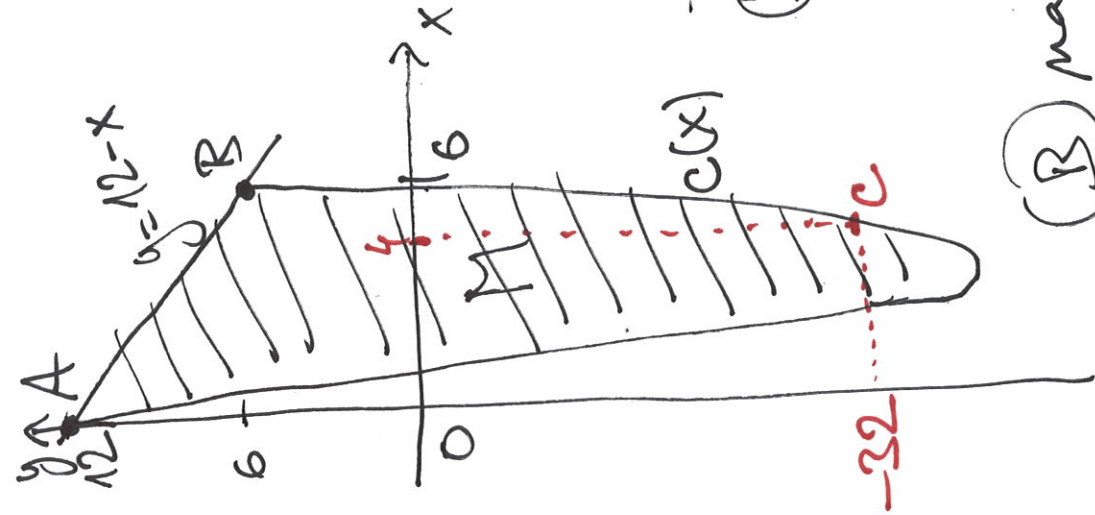
$\rightarrow$ opět lineární fci (1 proměnná),
která opět nemá žádné
stac. body, tedy žádné
kandidáty na lineárních
číslech obzvláště.

Důsledek: lineární fce na

mnichovskému má
kandidáty pouze ve vrcholech!

Pr: Najít extrém fce $f(x,y) = y - x$
na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;$

$$0 \leq x \leq 6; \underbrace{x^3 - 5x^2 - 7x + 12 \leq y \leq 12 - x}_{c(x)}$$



M je šlora omezená
přímkou $y = 12 - x$
a zobra grafem
fce $y = c(x)$,
obě fce prochnoují
body $A = [0, 12]$
 $B = [6, 6]$

(A) kandidáti
v M^o neexistují,
protože f je lineární

(B) na DM: A — B
a) lineární čítst
⇒ kand. nejsou

b) zahrnuje část $\int_A^B$

opět použijeme dokazovací
metodu: budeme uvaž

$y = c(x)$ do fce $f(x, y)$:

$$h(x) = f(x, c(x)) = c(x) - x =$$

$$= x^3 - 5x^2 - 7x + 12 - x =$$

$$= x^3 - 5x^2 - 8x + 12$$

$$h'(x) = 3x^2 - 10x - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 196$$

$$\sqrt{D} = 14, \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} 4 = x_1 \\ -\frac{2}{3} = x_2 \end{cases}$$

Lež v M? $x_1 = 4 \in (0, 6) \checkmark$

$x_2 = -\frac{2}{3} \notin (0, 6)$ nic

Dopčteme $y_1 = \cancel{12} c(x_1) = -32$

$\Rightarrow$ hod $C = [4, -32]$ je kandidát

+ máme ika vchoz $A = [0, 12]$
 $B = [6, 6]$

C) Dosaďme, poroňame:

$$A: f(0, 12) = \underline{12} \text{ MAX}$$

$$B: f(6, 6) = 0$$

$$C: f(4, -32) = \underline{-36} \text{ MIN}$$

Dosaďovací metoda lže s úspěchem

použít pro vstřední tvaru $y = c(x)$,

kde $c(x) = \text{polynom, exp, log}$

Kdy dosaďovací metoda nejde použít?

Pr: $M = \text{ kruh daný } x^2 + y^2 \leq 4$

$\partial M = \text{ kružnice } x^2 + y^2 = 4$

? dosaď. metoda? - potřebujeme

vyjádřit y pomocí x :

$$y^2 = 4 - x^2 \quad / \sqrt{}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

Po dosaďení tohoto vztahu
do fce f dostaneme

$$h(x) = f(x, \pm \sqrt{4 - x^2}),$$

tabže při derivačnis se

objeví nelineární derivačce

$\Rightarrow$ problém $\Rightarrow$ potřebujeme

jineé metody: metoda jacobianu

metoda Lagrangeových
množitelů